



TITLE:

# 壁に衝突する渦輪の数値シミュレーション(Navier-Stokes方程式の解の動的構造)

AUTHOR(S):

石井, 克哉

---

CITATION:

石井, 克哉. 壁に衝突する渦輪の数値シミュレーション(Navier-Stokes方程式の解の動的構造). 数理解析研究所講究録 1988, 637: 180-193

ISSUE DATE:

1988-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100130>

RIGHT:

## 壁に衝突する渦輪の数値シミュレーション

東大・工 石井 克哉 (Katsuya Ishii)

### 1. はじめに

局所的に存在する強い渦度の領域の運動や渦度の減衰の様子を調べることは物体後方の渦、大気中の乱流、自由噴流周辺の流れなどの研究において重要である。[1-3] こうした局在する渦度のポテンシャル流中での振舞いが従来研究されているが、現実の多くの流れ場では比較的弱い渦度が空間全体に広がっているのが普通である。これらの弱い渦度が強い曲線上に集中している渦度領域（いわゆる渦管）の運動にどのような影響を与えるかをここでは考える。

よく知られているようにポテンシャル流のなかにおかれた二次元の渦と三次元の渦は多くの点で異なった性質を持つ。たとえば、二次元の渦領域は粘性により拡散され、その面積を拡大するだけであり、その強さが強くなることはない。一方、三次元の渦管の場合、渦線の方にせん断流があるとき、ある場合は、渦領域の断面積が小さくなり、強さも大きな値をとるようになる。また、三次元の渦管は局所的な曲率に関係して自己誘導速度を持つ。

二次元の弱い渦度を持つ流れ中にある強い局在化された渦領域の運動とその減衰の解析はC.H.Liu and L.Ting (劉鎮輝、丁汝) [9] によってなされている。彼らは、特異摂動法を適用して強い渦度を持つ領域の減衰を表す解析的な解と周辺の弱い渦度を持つ流れの発展を記述する Euler方程式を得ている。一般的な三次元の渦管の運動の解析は非常に複雑になるため、軸対称の場合に劉らの用いた特異摂動法を拡張し、平面壁に垂直に衝突する渦輪の運動についての解析をおこなう。

---

\*現在の所属、 計算流体力学研究所

軸対称流に限ったとしても渦管は上に述べた三次元の性質を持っているため、二次元に比べ、より複雑な運動をすることが期待される。たとえば、円形ジェット内の渦輪の運動は文献 [8] で調べてある。

## 2 基礎方程式および境界条件

強い渦度が半径  $R$  のある円周のまわりに局在し、円の中心を通る円に垂直な直線を軸とした比較的弱い渦度  $\Omega$  が対象に分布しているような、軸対称な流れを考える。このドーナツ状の強い渦度の状態は普通渦輪と呼ばれ、渦度の強い部分を渦核と呼ぶ。渦核の大きさを  $\delta$ 、渦核のまわりの循環を  $\Gamma$  として、 $\delta \ll R$  および  $\Gamma/\nu \gg 1$  ( $\nu$  は運動学的粘性率) と仮定するとき、渦輪は背景の弱い渦度と相互作用しながらも独自の運動をする。弱い渦度  $\Omega$  の領域の代表的長さを  $L$  とし、 $L$  と渦輪の半径  $R$  とは同じ大きさであり、代表的な渦度  $\Omega$  の値は  $O(\Gamma\delta^2)$  だと仮定する。渦輪から  $L$  程度離れた場所での速度は  $\Gamma/L$  であるため、 $\Gamma/\nu$  をこの流れ場を表すレイノルズ数  $Re$  と考えることができる。さらに、渦核の大きさの時間発展を決定しているのが主に粘性である場合、 $\delta$  の大きさを  $O(Re^{1/2})$  と仮定してよいだろう。

こうした弱い渦度が空間の広い部分を占める軸対称流中におかれた渦輪の運動を解析するために、図 1 のような円筒座標系  $r(r, \theta, z)$  を導入する。また、渦輪は  $R_0(R, Z)$  に位置しているとする。この座標系で全物理量は角度  $\theta$  には依存しないため、以後すべての表式で  $r(r, z)$  のように径方向、軸方向の成分のみを書くことにする。また、この座標系表示のなかでは、渦度を直接扱うよりも渦度を対称軸からの距離  $r$  で割った “実効的な渦度”  $\kappa (= \omega/r)$  とストークスの流れ関数  $\psi$  を用いるのが便利である。これらにより、基礎方程式は

$$\partial_t \chi + u \partial_r \chi + w \partial_z \chi = \Gamma \varepsilon^2 (\Delta_2 \chi + 2/r \partial_r \chi) \quad (1a)$$

$$-\chi = 1/r^2 \Delta_2 \phi - 1/r^3 \partial_r \phi \quad (= L[\phi]) \quad (1b)$$

と書き表せる。

$$\text{ただし} \quad u = -1/r \partial_z \phi, \quad w = 1/r \partial_r \phi \quad (1c)$$

であり、

$$\Delta_2 = \partial^2 / \partial r^2 + \partial^2 / \partial z^2, \quad \varepsilon = \text{Re}^{(-1/2)} \quad (1d)$$

とした。境界条件は

$$\text{無限遠} \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \phi \rightarrow \Psi(r), \quad \chi \rightarrow \Omega(r)/r, \quad (2a)$$

$$\text{対称軸上} \quad r = 0 \quad \text{で} \quad \phi = 0, \quad \chi : \text{有限の値}, \quad (2b)$$

である。さらに、固体壁上では

$$u = 0, \quad w = 0, \quad (2c)$$

でなければならない。初期条件として、渦輪から十分に離れた場所の滑らかな速度場の Navier-Stokes 方程式の解、あるいは Euler 方程式の解

$$\phi = \Psi(r), \quad \chi = \Omega(r) / r \quad (3)$$

とする。

### 3. 特異摂動法

基礎方程式の最高次微分項である粘性項は渦輪の渦核中だけで重要なため、特異摂動法を適用し解析を進めることは有用であろう。ここでは、 $(r, z)$  という通常の独立変数のほかに引き延ばされた独立変数  $(r^*, z^*)$  を

$$r^* = (r - R) / \varepsilon, \quad (4a)$$

$$z^* = (z - R) / \varepsilon, \quad (4b)$$

のように導入し解析をすすめる。以下では、切りつなぎ法との関係を考え、通常の独立変数を外部変数、引き延ばされた独立変数を内部変数と呼ぶ。また、内部変数が  $O(1)$  の値である渦輪近くの領域を内部領域、十分離れた領域を外部領域と呼ぶことにする。内部変数については、局所極座標系を用いた方が渦核内の流れ場を表示するのに都合がよいため、極座標  $(\rho, \theta)$  を

$$r^* = -\rho \cos \theta, \quad (5a)$$

$$z^* = \rho \sin \theta, \quad (5b)$$

のように定義する。内部領域、外部領域の両方で有効な複合解を求めるのに、便利のように、解を次の三つの部分に分解して考える。

$$\chi = \Omega(r)/r + \bar{\chi}(r, z, t; \varepsilon) + \varepsilon^{-2} \bar{\chi}(\rho, \theta, t; \varepsilon), \quad (6a)$$

$$\phi = \Psi(r) + \tilde{\phi}(r, z, t; \varepsilon) + \bar{\phi}(r, z, t; \varepsilon) + \hat{\phi}(\rho, \theta, t; \varepsilon) \quad (6b)$$

ここで  $\tilde{\chi}$  は遠方場の渦分布の変動量を表し外部変数のみに依存しており、 $\bar{\chi}$  は内部変数のみの関数である。また、 $\tilde{\phi}$  は  $\tilde{\chi}$  に対応している。これらを代入すると

$$L[\tilde{\psi}] + \tilde{\chi} = 0, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} & L[\hat{\phi}] + G \\ &= -\varepsilon^{-2} \left[ \frac{1}{(R + \varepsilon \bar{r})^2} \bar{\Delta}_2 \hat{\psi} - \frac{\varepsilon}{(R + \varepsilon \bar{r})^3} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \bar{r}} + \bar{\chi} \right] + G, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial r} + W \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial z} + U \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Omega}{r} \right) \\ & - \varepsilon^2 \left\{ \Delta_2 \left( \tilde{\chi} + \frac{\Omega}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \tilde{\chi} + \frac{\Omega}{r} \right) \right\} + F \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} &= - \left\{ \varepsilon^{-4} \left\{ \frac{-1}{R + \varepsilon \bar{r}} J[\bar{\psi}, \bar{\chi}] + U \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{z}} \right\} \right. \\ & \quad - \varepsilon^{-3} R \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial r} \\ & \quad + \varepsilon^{-2} \Gamma \left\{ \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} - \bar{\Delta}_2 \bar{\chi} \right\} \\ & \quad \left. + \varepsilon^{-1} \left\{ -\frac{1}{\bar{r}} J[\bar{\psi}, \frac{\Omega}{r} + \tilde{\chi}] - \frac{3\Gamma}{R + \varepsilon \bar{r}} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{r}} \right\} - F \right\} \end{aligned}$$

where

$$U = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \tilde{\psi}), \quad (7d)$$

$$W = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Psi + \tilde{\psi}), \quad (7e)$$

$$\text{and } \bar{\Delta}_2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$J[A, B] = \frac{\partial A}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial B}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial B}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial A}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial A}{\partial \rho} \frac{\partial B}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \rho} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right\}.$$

となる。

境界条件は

$$\hat{\psi} + \hat{\phi}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\hat{\psi} + \hat{\phi}^{(1)}) = 0 \text{ at } \rho = 0, \quad (8a)$$

$$\hat{\psi} \rightarrow 0 \quad \text{as } \rho \rightarrow \infty, \quad (8b)$$

$$\hat{\psi}^{(0)} + \hat{\phi} = 0 \quad \text{at } r = 0, \quad (8c)$$

$$\hat{\phi} \rightarrow 0 \quad \text{as } r^2 + z^2 \rightarrow \infty. \quad (8d)$$

である。ここで、左辺には外部変数のみに依存する量を集めてあり、最低次は  $O(1)$  である。右辺は  $O(\varepsilon^{-4})$  ではじまり、渦核付近でのみ  $O(1)$  でないとする。このため、二つの関数  $F, G$  を付加してあり、これらの関数は  $\varepsilon$  の各次数で両辺の性質が保たれるように決定する。また、左辺における粘性項は固体壁の近傍でのみ  $O(1)$  であり、他の領域では（ここでの解析の精度の範囲内で）無視できる。内部変数の最低次の解析は、渦核内の渦分布は十分時間がたつとガウス分布になることを示す。このため、ガウス分布をした渦核を表す内部変数の解にたいする外部解の方程式を求める。関数  $F, G$  を右辺の他の項の内部変数についての平均値により決定すると最終的に

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\psi + \tilde{\psi} + \bar{\psi}) \Big|_{r=r_0} \\ &+ \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \left( \frac{8R}{\delta} \right) + \frac{\gamma - \ln 2 - 1}{2} \right), \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\dot{R} = \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \tilde{\psi} + \bar{\psi}) \Big|_{r=R}, \quad (9b)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta^2 R) = 4R, \quad (9c)$$

$$L[\tilde{\psi}] = -\tilde{\chi}, \quad (9d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi} + u \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\chi} + w \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\chi} = & -u \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Omega}{r} \right) \\ & + \epsilon^2 \left\{ \Delta_2 \left( \tilde{\chi} + \frac{\Omega}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \tilde{\chi} + \frac{\Omega}{r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9e)$$

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{\psi}) - \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\psi} \right\rangle, \quad (9f)$$

$$w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Psi + \tilde{\psi}) + \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi} \right\rangle. \quad (9g)$$

を得る。ただし、 $\langle \cdot \rangle$ は  $\epsilon \ll H \ll L$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{4RH^2} \int_{-H}^H \int A(R + \epsilon \bar{r}) d\bar{r} d\bar{z}.$$

をあらわす。はじめの三式は渦輪の位置と渦核の大きさの時間発展を表し、残りは外部変数のみの方程式となっている。式(9e)の右辺は元の流れ場からのずれた渦度の発生と粘性による拡散を表す。元の流れ場が径方向に二次の関数形でかけるとき、第一項によるずれの渦度場が生成されないことに注意する必要がある。



ある。この項を「実効渦度勾配」と呼ぶとき、二つの円形ジェット内の渦輪の運動は Table 1. のようにまとめられている。一般に、円形ジェットを取り囲む形で渦輪が存在しているとき、ジェットと同方向に進もうとする渦輪はその半径が小さくなり、反対方向に進もうとする渦輪は大きくなろうとするといえる。以下、上の式を壁に衝突する渦輪について数値的に解いた例を考える。

#### 4. 数値計算

式(9e)は三次上流差分を、式(9d)はSOR法を使って解いた。このとき、 $u$  と  $v$  は式(9f,g)により外部変数のみの関数であるので差分化するとき、空間格子の大きさ  $\Delta x$  は  $\delta$  によらず選択することができる。計算領域は十分大きくとり、

$$\tilde{\chi} = 0, \quad \tilde{\phi} = 0$$

とした。時間積分は二次精度でおこなった。

初期条件として、 $t = 0$  で渦輪が突然発生したとして、壁からの渦剝離など、その後の発展をみることにする。計算には NASA Langley 研究所の CDC VPS32 (Cyber 205) と 計算流体力学研究所の Fujitsu VP-200 を用いた。

#### 5. 結果

非粘性の理論によれば、渦輪が平面壁に壁に垂直に近づくと渦輪はその半径が大きくなり、しだいに近づくと速度を減少する。しかし、実験ではしばしば壁に近づいたとき、rebound と呼ばれる渦輪の跳ね返り現象が観察されている。[4-6] これには、渦輪の流れによる壁上での境界層の形成とその壁からの剝離が重要な役割をはたしている。山田等 [7] は 高いレイノルズ数の流れの中

での二次渦の発生を報告している。ここでは平面壁に近づく渦輪の三つのケースを考察する。各ケースの初期値のパラメータは (ケース 1)  $Re = 900$ ,  $L/R = 2.5$ ,  $\Gamma = 9$ ,  $\delta = 0.01$ 、(ケース 2)  $Re = 7600$ ,  $L/R = 2.5$ ,  $\Gamma = 76$ ,  $\delta = 0.01$ 、(ケース 3)  $Re = 10000$ ,  $L/R = 5$ ,  $\Gamma = 10$ ,  $\delta = 0.01$  である。結果は ケース 1 を図 3 a-c に ケース 2 を図 4 a-c に ケース 3 を図 5 a-c に示す。各図とも (a) には渦輪中心の軌跡、(b) には渦輪中心の壁からの距離の時間発展、(c) には代表的な時刻での渦度の等高線を示してある。すべてのケースについて、reboundの現象が見られる。特に、ケース 3 の場合は顕著である。最もレイノルズ数の小さいケース 1 の場合には、壁から完全に剝離した二次渦の発生は認められなく、reboundの現象も曖昧なものとなっている。図には壁近くの渦により渦輪内の渦度分布が変えられている時間も含まれているが、そうした渦輪が壁に近づき過ぎた時間では特異摂動法の適用できる近似条件を満たさないため結果は不正確なものとなっている。ケース 2 では渦度の壁からの剝離は一層大きくなっているが、まだ完全に強い渦度の部分は壁から剝離してはいない。ケース 3 の場合のみ強い渦度の部分が壁から剝離しており、渦輪の跳ね返りが大きくなっている。ただし、壁から離れた部分での計算格子が大き過ぎるためすぐに減衰している。こうしたレイノルズ数の依存性は定性的に比較的高いレイノルズ数での実験結果[7]と一致する。

ここで発表したものの一部は筆者が NASA Langley Research Center に National Research Council Associate として滞在していたときにおこなった劉鎮輝氏との共同研究の成果であり、劉氏および理論的問題についての議論に快く応じてくださった Courant Institute of Mathematical Science の丁教授に感謝いたします。また、数値計算の実行にあたり協力いただいた宇宙研 桑原邦郎 助教授、計算流体力学研究所のスタッフに感謝いたします。

## References

1. van Dyke, M., "An Album of Fluid Motion The Parabolic Press", Stanford, Calif. 1982.
2. Lugt, H.J., "Vortex Flow in Nature and Technology," John Willey & Sons, N.Y., 1983.
3. Liu, C.H., Krause, E. and Ting, L., "Vortex-dominated Flow with Viscous Core Structure," AIAA paper 85-1556, July 1985.
4. Boldes, U. and Ferreri, J.C., "Behaviour of Vortex Ring in the Vicinity of a Wall," Phys., Fluids, vol.16, pp.2005-2006, 1973.
5. Oshima, Y., "Motion of the Vortex Rings Near the Boundary Plane of the Fluid," Natural Science Report, Ochanomizu University, vol.24, No. 2, pp.61-68, 1973.
6. Didden, N., "On Vortex Formation and Interaction with Solid Boundary Layer," Vortex Motion (H.G.Hornung & E.A.Muller ed.), Friedr. Vieweg & Son, 1982.
7. Yamada, H., et al., "Flow Field Produced by a Vortex Ring Near a Plane Wall," J. Phys. Soc. Japan, vol.51, pp.1663-1670, 1982.
8. Ishii, K. and Liu, C.H., "Motion and Decay of Vortex Rings Submerged in a Rotational Flow," AIAA paper 87-0043, Jan. 1987.
9. Liu, C.H. and Ting, L., "Interaction of Decaying Trailing Vortices in Spanwise Shear Flow," Computers & Fluids vol.15, No.1, pp.77-92, 1987.

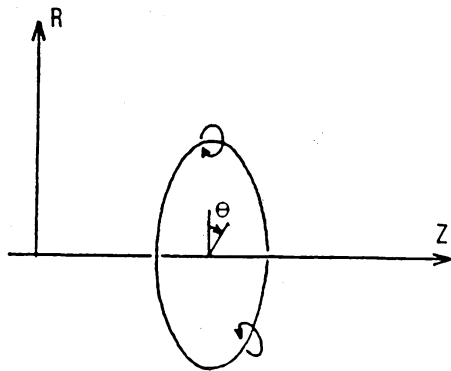


Fig.1 Cylindrical Coordinates

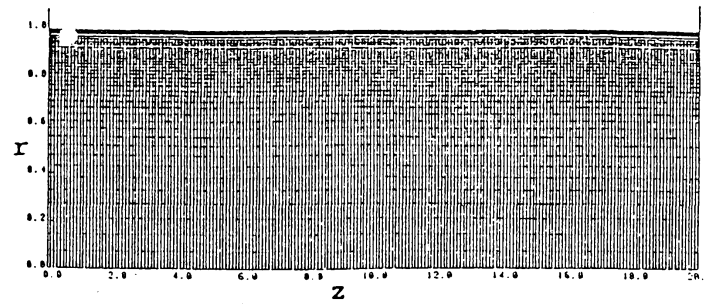


Fig.2a Mesh System for Circular pipe(200x50)

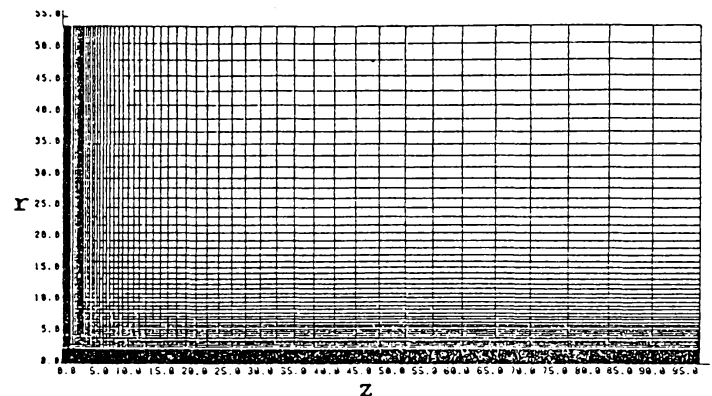


Fig.2b Mesh System for Flat plate perpendicular to the symmetric axis(100x100)

Table 1.

	JET I	JET II	
	$10\text{sech}(.25r)$	$8( \tanh( (5-r)/2 ) + \tanh( (5+r)/2 ) )$	
initial position of a vortex ring (local effective vorticity gradient)	$R(0)=6$ (negative)	$R(0)=6$ (negative)	$R(0)=4$ (positive)
vortex ring with $\Gamma = 5$	shrink	shrink	aperiodic motion
vortex ring with $\Gamma = -5$	gradually enlarging	oscillation (with increase in mean radius)	shrink

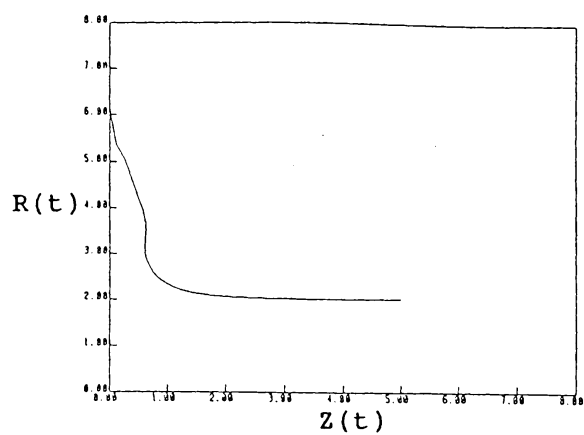


Fig. 3a Trajectory of the vortex ring

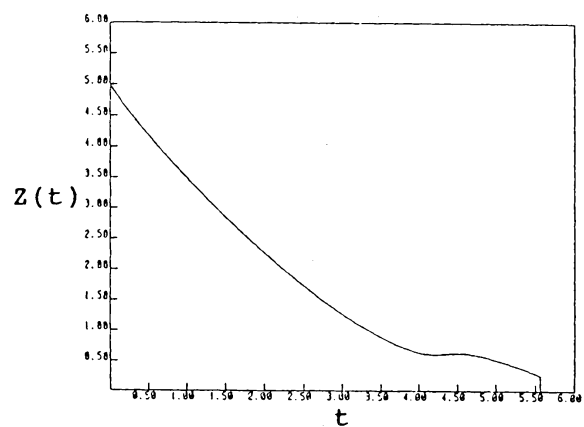
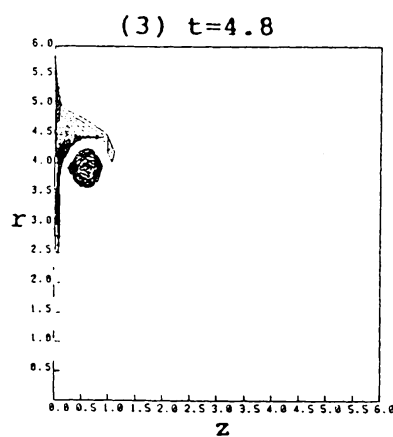
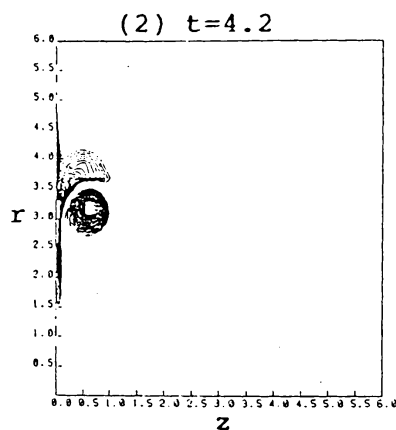
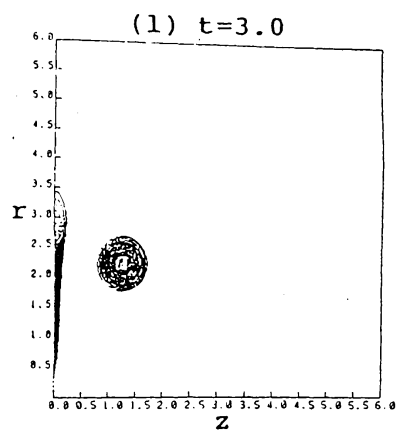
Fig. 3b Temporal evolution of the position of ring  $Z(t)$ 

Fig. 4c Contour map of the vorticity

Fig. 3 Motion of the vortex ring approaching a plane wall at  $Re = 900$ .

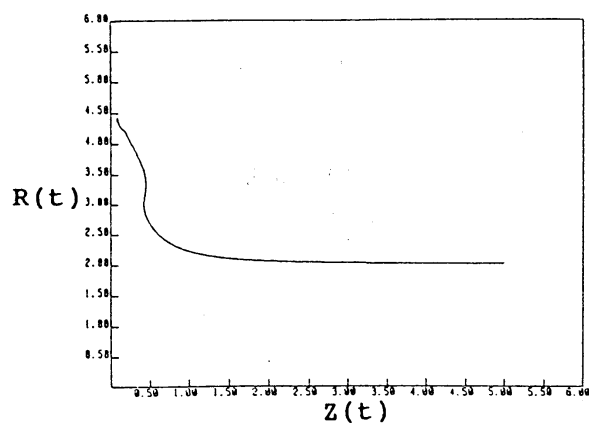


Fig. 4a Trajectory of the vortex ring

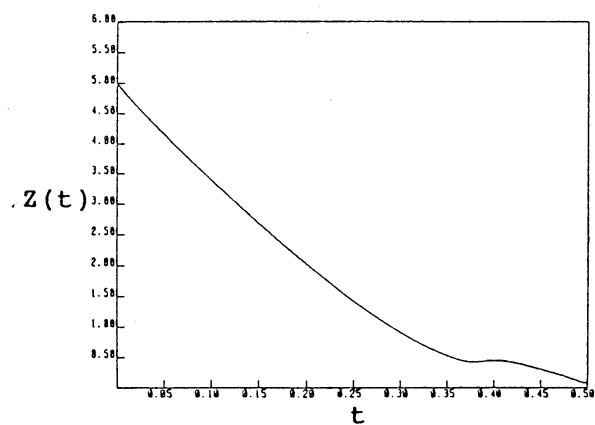
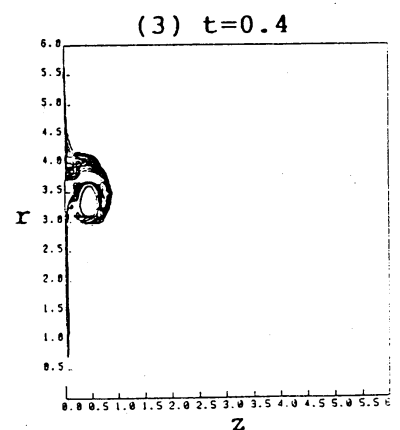
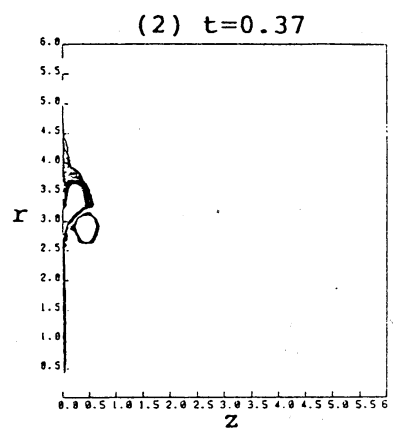
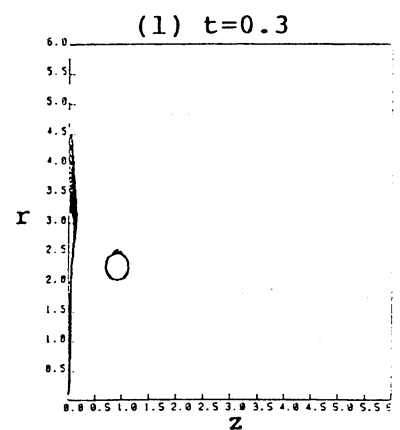
Fig. 4b Temporal evolution of the position of ring  $Z(t)$ 

Fig. 5c Contour map of the vorticity

Fig. 4 Motion of the vortex ring approaching a plane wall at  $Re=7600$ .

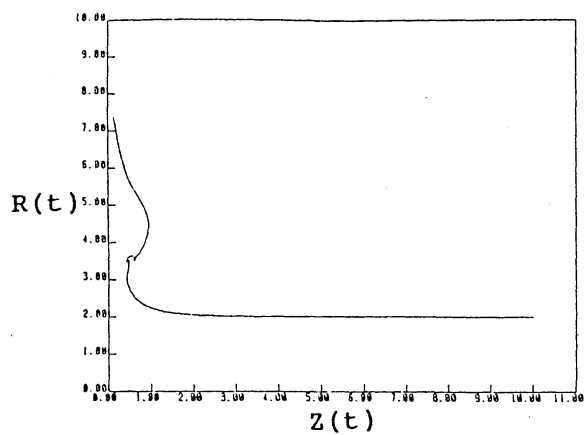


Fig.5a Trajectory of the vortex ring

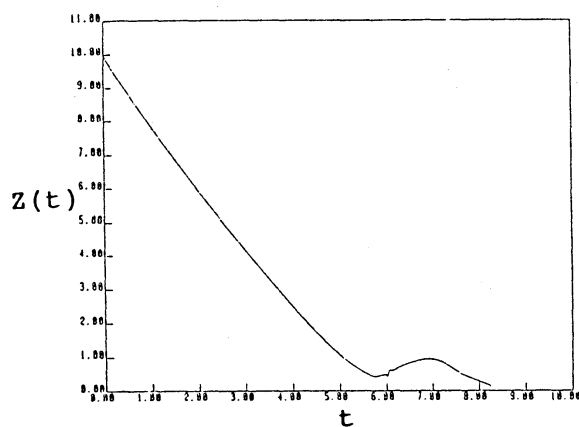
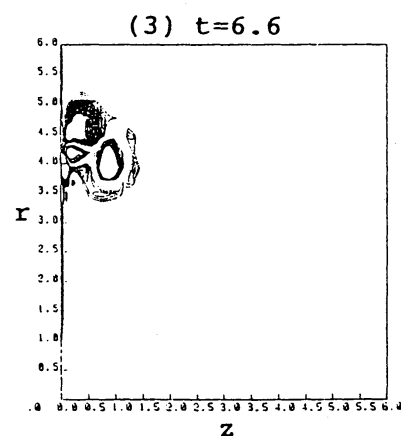
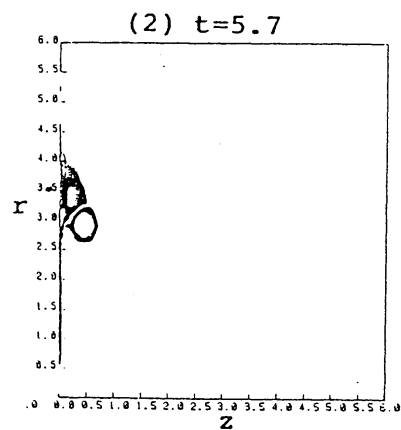
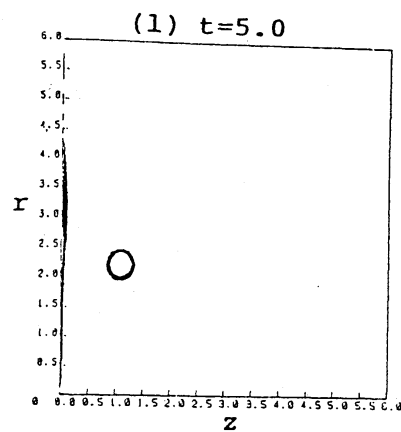
Fig.5b Temporal evolution of the position of ring  $Z(t)$ 

Fig.6c Contour map of the vorticity

Fig.5 Motion of the vortex ring approaching a plane wall at  $Re=10000$ .